Musterlösung zu Übungsblatt 1

erstellt von Jan Stricker

1.S *Von Abbildungen zum Würfeln.*
a) Bei dieser Aufgabe geht es darum geschickt die Anzahl von Abbildungen mit einer bestimmten Eigenschaft zu zählen.

(i) Erst einmal darf die 1 auf alle 6 Zahlen des Bildbereichs abgebildet werden, ohne dass die Bedingung der Verschiedenheit der Bildelement gestört wird. Weiterhin darf nun die 2 nicht auf die selbe Zahl wie die 1 abgebildet werden: Es bleiben 5 Möglichkeiten. Die 3 darf jetzt auch nicht auf die selben Zahlen wie 1 und 2 abgebildet werden: Es bleiben 4 Möglichkeiten. Zum Schluss darf natürlich die 4 auch nicht auf eine Zahl abgebildet werden, welche vorher schon abgebildet wurde: Es bleiben 3 Möglichkeiten.
Daraus ergibt sich für die Anzahl der Abbildungen: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

(ii) Hier kann man erst dasjenige Element im Bildbereich ausdeuten, welches zweimal als Bild auftritt, dafür hat man 6 Möglichkeiten. Dann kann man die beiden Argumente wählen, die darauf abgebildet werden: es gibt 6 zweielementige Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ (die kann man leicht hinschreiben, oder man erinnert sich an den Binomialkoeffizienten aus der Schule bzw. früheren Vorlesungen). Die restlichen beiden Argumente müssen darauf achten, auf "neue" Zahlen abgebildet zu werden. Daraus folgt nach selbem Prinzip wie in Teil (i) für die Anzahl der Abbildungen:$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$.

(iii) Bei diesem Fall müssen wir besonders aufpassen, denn hier gibt es 2 Fälle. Erstens: 3 Zahlen werden auf eine Zahl abgebildet und eine Zahl auf eine Andere. Zweitens: Jeweils 2 Zahlen bilden auf die selbe Zahl ab.
Bei beiden Fällen gibt es 2 Zahlen im Bildbereich, die beliebig aber unterschiedlich gewählt werden dürfen. Daraus folgen schon mal $6 \cdot 5$ Möglichkeiten. Im ersten Fall müssen 3 der 4 Argumente auf die selbe Zahl abgebildet werden. Dafür gibt es 4 Möglichkeiten. Beim zweiten Fall muss es zwei Pärchen bei 4 Zahlen geben. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten, aber da die Fälle, wie "1 und 3, und 3 und 1 bilden ein Paar" gleich sind müssen wir die 6 noch durch 2 teilen. Es folgt: $6 \cdot 5 \cdot (4 + \frac{6}{2}) = 210$.
(iv) Eine der 4 Zahlen darf nun auf eine beliebige Zahl abgebildet werden, aber alle anderen, müssen dann auf die selbe Zahl abgebildet werden. Nach selbem Prinzip wie zuvor folgt für die Anzahl der Abbildungen: $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$.

b) Jeder Ausgang beim 4-maligen gewöhnlichen Würfeln entspricht genau einer Abbildung von $\{1, 2, 3, 4\}$ nach $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: man stelle sich vor, die 1 bis 4 stehen für einen Würfelwurf und werden auf ihr Ergebnis abgebildet. Es gibt $6^4 = 1296$ mögliche Ausgänge, und alle Ausgänge sind gleich wahrscheinlich. Damit sind wir in der Situation einer rein zufälligen Wahl. In Teil a) haben wir für jedes der in b) angegebenen Ereignisse $\{X \in A\}$ bereits die Anzahl der Elemente von A (die "Anzahl der günstigen Ausgänge") berechnet. Daraus ergibt sich für die gefragten Wahrscheinlichkeiten:

(i) $\frac{360}{1296} = \frac{5}{18} \approx 0,2778$ (ii) $\frac{720}{1296} = \frac{5}{9} \approx 0,5556$ (iii) $\frac{210}{1296} = \frac{35}{216} \approx 0,1620$
(iv) $\frac{6}{1296} = \frac{1}{216} \approx 0,0046$
formalere Lösung:
b)In 1a haben wir die Mächtigkeiten der Mengen A_k , $k = 1, 2, 3, 4$ bestimmt, wobei A_k die Menge der Abbildungen von $\{1, 2, 3, 4\}$ nach $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist mit k-elementigem Bildbereich. Ist nun X eine rein zufällige Wahl aus der Menge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{\{1,2,3,4\}}$, so ergeben sich die gefragten Wahrscheinlichkeiten nach der in der Vorlesung besprochenen (und dort immer wieder auftauchenden) Formel $\mathbf{P}(X \in A_k) = \frac{|A_k|}{|S|}$. Dabei ist $|S| = 6^4$, woraus sich die Wahrscheinlichkeiten ergeben:
(i) $\mathbf{P}(X \in A_4) = \frac{|A_4|}{|S|} = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18} \approx 0,2778$ (ii) $\mathbf{P}(X \in A_3) = \frac{|A_3|}{|S|} = \frac{720}{1296} = \frac{5}{9} \approx 0,5556$
(iii) $\mathbf{P}(X \in A_2) = \frac{|A_2|}{|S|} = \frac{210}{1296} = \frac{35}{216} \approx 0,1620$ (iv) $\mathbf{P}(X \in A_1) = \frac{|A_1|}{|S|} = \frac{6}{1296} = \frac{1}{216} \approx 0,0046$

2.S *Was 6 recht ist, ist g billig.* Bei dieser Aufgabe hilft es sich vorher die Aufgabe als Würfelwurf mit 4 Würfen vorzustellen, bei dem nur 2 Ergebnisse unter einem gewissen Würfelwert liegen soll. Nun hat der Würfel g Seiten und man will höchsten die Zahl f werfen.

a) (i) Zweimal muss ein Wert in F liegen und zweimal außerhalb von F. Wir betrachten die zweielementige Menge $\{i_1, i_2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, für die a_{i_1} und a_{i_2} in F liegen. Es gibt 6 Möglichkeiten, die zweielementige Menge $\{i_1, i_2\}$ aus $\{1, 2, 3, 4\}$ zu wählen (vgl. Aufgabe 1 a (ii)). Die Anzahl der Element von F ist f und die Anzahl der Elemente von $G \setminus F$ ist $g - f$. Die gefragte Anzahl ergibt sich damit als $6f^2 \cdot (g - f)^2$.

(ii) Mit $f = pg$ wird das Ergebnis aus (i) zu $(pg)^2 \cdot (g - pg)^2 = p^2(1 - p)^2 g^4$:

$$6 \cdot g^4 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^2$$

b) Hier kann wieder frei nach dem Prinzip *Anzahl günstige durch Anzahl alle Ausgänge* gearbeitet werden. Insgesamt gibt es g^4 verschiedene Ausgänge, da jedes a_i g mögliche Werte annehmen kann und $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Alle sind gleich wahrscheinlich. Also müssen wir unsere Resultate aus a) durch g^4 teilen. Dabei springt ins Auge, dass sich dies bei (ii) ganz einfach machen lässt. Als Ergebnis erhalten wir:

$$6 \cdot g^4 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^2 / g^4 = 6 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^2$$

.

c) Sobald Sie MonteCarlo.R geöffnet haben, können Sie oben in der Datei n zu 4 und k zu 1000 ändern, um 1000 mal 4 Punkte in die Fläche zu werfen.Im RStudio drücken Sie dann, nach öffnen und ändern der Datei, Strg+Shift+Enter. Jetzt sollte das Programm ausgeführen werden, für jedes weitere Mal Enter wird eine weiterer Punkt hinzugefügt und schließlich ein Histogramm erstellen, siehe für die Ausgabe: Abbildung 1 S. 3.
Ein empirischen Schätzwert findet sich bei der dritten Säule (in der Abbildung 1 mit einem Pfeil markiert). Deren Höhe zeigt, bei wie vielen aus den 1000 Wiederholungen genau 2 Punkte in der blauen Fläche gelandet sind. Für den empirischen Schätzwert der in b) gefragten Wahrscheinlichkeit teilen wir die Höhe der Säule durch 1000.

3. *Monte-Carlo-Schätzung eines Flächenanteils über die Trefferquote.* Wir nutzen weiterhin R mit MonteCarlo.R. Wir benutzen MonteCarlo.R genauso wie in der 2c, nur ändern wir die Anzahl Punkte, welche wir in S werfen, jeweils der Angabe der Aufgabe entsprechend. Man kann erkennen, dass das Histogramm beim Übergang von $n = 50$ zu $n = 200$ und von $n = 200$ zu $n = 800$ jeweils ca. um den Faktor 2 schmäler wird. (Siehe Abbildungen 2-4 im Anhang).
Nutzen Sie eventuell noch ihre Zeit ein bisschen um mit dem Programm herum zu probieren. Vielleicht finden Sie noch die ein oder andere erstaunliche Entdeckung.

4. *Approximationen für die Kollisionswahrscheinlichkeit.* a) In Vorlesung 1b) haben wir die Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit bei n-maliger rein zufälliger Wahl aus $\{1, \dots, g\}$ berechnet berechnet und approximiert. Aufgabe 1b (i) ist ein Spezialfall davon mit $n = 4$ und $g = 6$.
(i) Mit Hilfe der Stirling-Approximation:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{g}}} \exp\left(-g\left(\frac{n}{g} + \left(1 - \frac{n}{g}\right)\ln\left(1 - \frac{n}{g}\right)\right)\right)$$

Mit $n = 4$ und $g = 6$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{6}}} \exp\left(-6\left(\frac{4}{6} + \left(1 - \frac{4}{6}\right)\ln\left(1 - \frac{4}{6}\right)\right)\right) \approx 0,2855$$

(ii) über die Approximation durch Linearisierung von exp ergibt sich die Näherung

$$\exp\left(-\frac{\binom{n}{2}}{g}\right)$$

Wieder mit $n = 4$ und $g = 6$:

$$\exp\left(-\frac{\binom{4}{2}}{6}\right) = e^{-1} \approx 0,3679$$

Der exakte Wert für die Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit ist das Ergebnis aus Aufgabe 1 b): $\frac{5}{18} \approx 0,2778$. Man sieht, dass die Stirling Approximation deutlich genauer ist als die durch Linearisierung von exp. Das liegt daran, dass n und g hier recht nahe aneinander liegen und die Linearisierung von exp nur gut approximiert, wenn n deutlich kleiner als g ist.

b) Wenn Sie Approximation.R (nach der Setzung von $n = 4$ und $g = 6$) ausführen, finden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 4 über dem Argument 4 (Siehe Pfeil in Abbildung 5 im Anhang) auf der x-Achse.
Sie werden sehen, dass für kleineres n insbesondere die Approximation durch Linearisieren von exp besser wird. Probieren Sie gerne noch weiter verschiedene g und n aus und betrachten Sie auch die relativen Fehler.

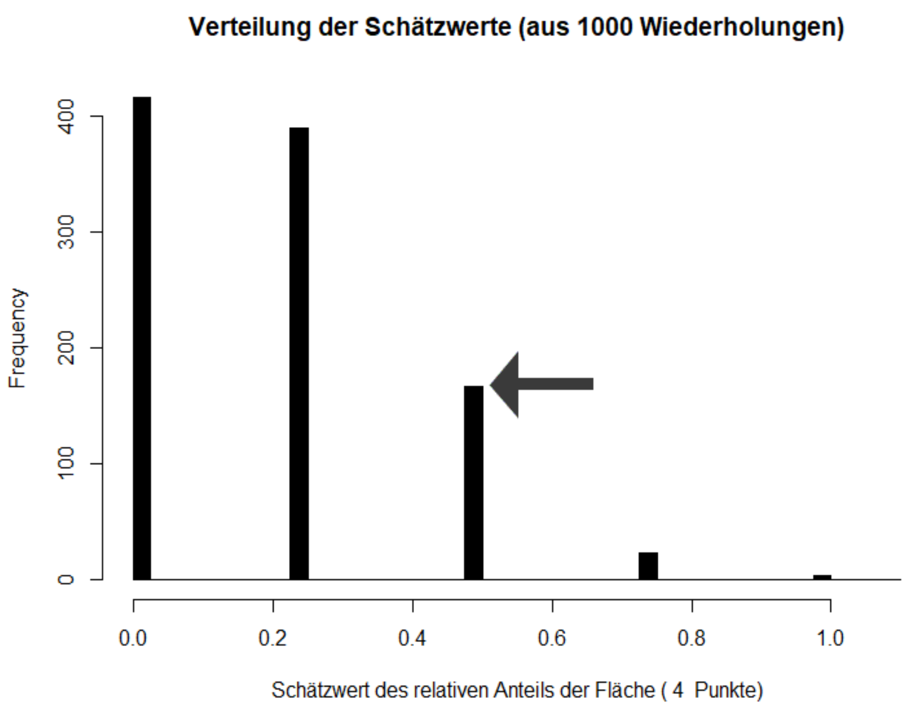

Abbildung 1: Histogramm Aufgabe 2c

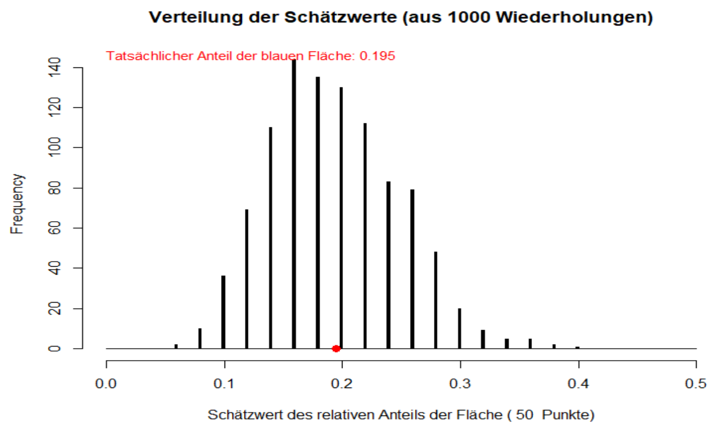

Abbildung 2: Histogramm 50 Punkte

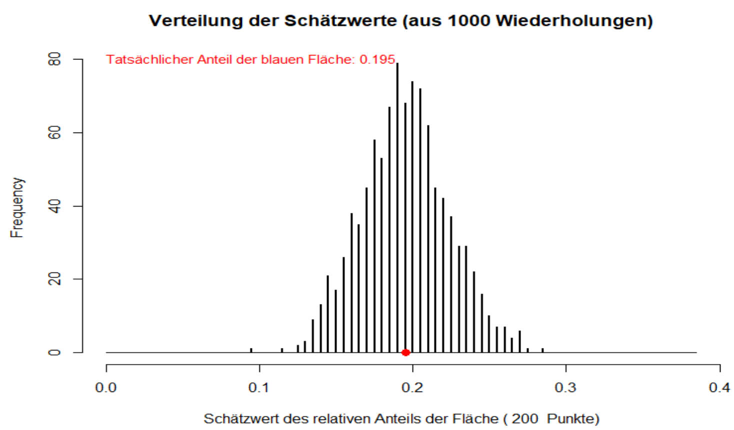

Abbildung 3: Histogramm 200 Punkte

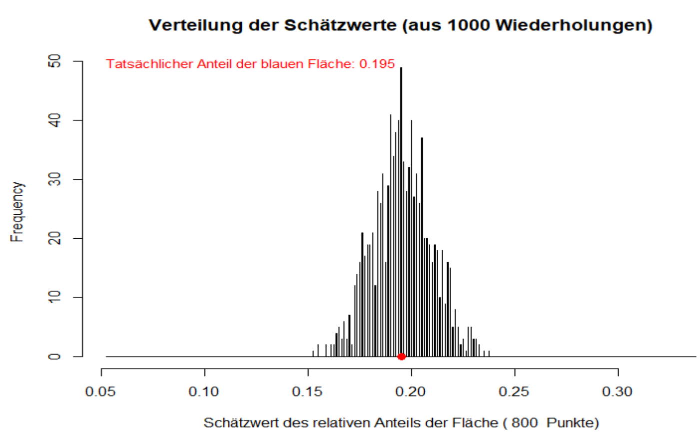

Abbildung 4: Histogramm 800 Punkte

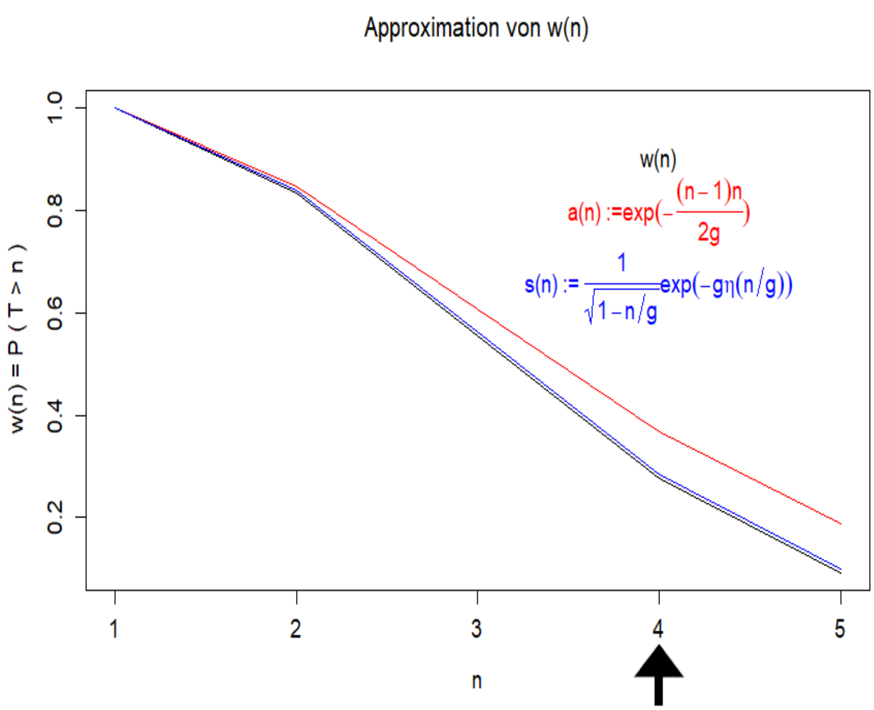

Abbildung 5: Approximationen Aufgabe 4b